# ANALISIS CINEMATICO

# FISICO-MATEMATICO

# MECANISMO

# BIELA-MANIVELA

ELOY BELTRAN BELTRAN

Se han determinado los valores cinematicos de la parte mas importante del mecanismo del biela-manivela, como es el piston, que se desplaza en el eje cartesiano x.

Se han reducido las minimas constantes en la obtencion de la ecuacion final, aplicando las propiedades oportunas para reducir la ecuacion a las variables de la barra de entrada, tanto su posicion angular, como su velocidad angular.

Como deciamos se han obtenido propiedades a partir de la ley del seno e igualdades para sustituir las variables y dejarlas en funcion de la barra de entrada, teniendo una ecuacion (Entrada-Salida), obtenidas por los dos metodos científicos, tanto matematicos, como físicos, ambas ecuaciones dan exactamente el mismo resultado.

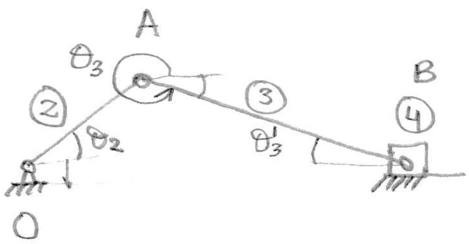
En cuanto a las acelaraciones, como no influye la acelaracion de coriolis, tambien dan lo mismo, salvo que la ultima ecuacion, correspondiente al metodo físico, tiene que sustituirse por las propiedades, o desglosarse la ecuacion obtenida por el metodo matematico. Algun signo positivo o negativo esta dando guerra, pero no se mas, soy eléctrico.

Hay dos apartados, la seccion velocidades, y las acelaraciones del piston, en cada apartado muestra el metodo matematico primero, y despues el fisico.

Despues de mi manuscrito, he puesto un analisis de un mecanismo biela manivela con una pequeña diferencia añadida, este incorpora un tramo entre el piston y la biela denominado (d). Este analisis esta hecho por el autor Ángel Franco García, autor de la web de fisica: http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/default.htm.

Disculpen el cambio de fuente, pero me gusta el Simsun a tamaño 11 con 1,15 de interlineado, y si no he cambiado la fuente de las letras del texto de la web de fisica, es porque la conversion estropea las variables del Times New Roman, lo siento.

Estoy interesado en resolver unos cuantos mecanismos (como hobby) y tengo muchas dudas, necesito gente me ayude. Saludos. Mi correo es eloybb@gmail.com.




$\frac{dx}{dt} = \vec{v}_x$ $\quad \frac{d\theta}{dt} = \omega$ ← Propiedades

0 $\quad$ θ

$X = OA\cos\theta_2 + AB\cos\theta_3' \longrightarrow \frac{dx}{dt} = OA\cdot -\operatorname{sen}\frac{d\theta_2}{dt} + 0\cdot\cos\theta_2 + AB\cdot -\operatorname{sen}\frac{d\theta_3'}{dt} + 0\cdot\cos\theta_3'$

$f(x) = u(x)\cdot v(x) \rightarrow u\cdot v' + u'\cdot v \rightarrow \vec{v}_x = OA\cdot -\operatorname{sen}\theta_2\,\omega_2 + AB\cdot -\operatorname{sen}\theta_3'\,\omega_3$

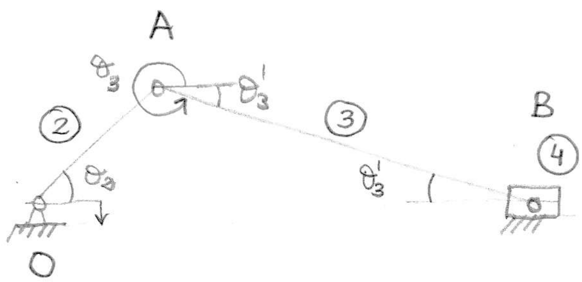
$\omega_3 = \omega_2\cdot\frac{OA}{AB}\cdot\frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_3'}$

$\vec{v}_x = -OA\operatorname{sen}\theta_2\,\omega_2 - AB\operatorname{sen}\theta_3'\,\omega_3$

$\theta_3' = \operatorname{arcsen}\left(\frac{OA\operatorname{sen}\theta_2}{AB}\right)$

$$\vec{v}_x = -OA\operatorname{sen}\theta_2\,\omega_2 - AB\operatorname{sen}\left(\operatorname{arcsen}\left(\frac{OA\operatorname{sen}\theta_2}{AB}\right)\right)\omega_2\cdot\frac{OA}{AB}\cdot\frac{\cos\theta_2}{\cos\left(\operatorname{arcsen}\left(\frac{OA\operatorname{sen}\theta_2}{AB}\right)\right)}$$

$$\vec{v}_x = -\frac{OA^2\omega_2\operatorname{sen}\theta_2\cos\theta_2}{AB\sqrt{1-\frac{OA^2\operatorname{sen}^2\theta_2}{AB^2}}} - OA\,\omega_2\operatorname{sen}\theta_2 \rightarrow \omega_2 = \frac{\vec{v}_x}{OA\operatorname{sen}\theta_2 + \frac{OA^2\cos\theta_2\operatorname{sen}\theta_2}{AB\sqrt{1-\frac{OA^2\operatorname{sen}^2\theta_2}{AB^2}}}}$$




Propiedades

$$\omega_3 = \omega_2 \cdot \frac{OA}{AB} \cdot \frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_3'}$$

$$\theta_3' = \arcsin\left(\frac{OA \sin\theta_2}{AB}\right)$$

$$\theta_3 = 360^\circ - \theta_3'$$

$$\vec{v}_{B3} = \vec{v}_{B4}\vec{i} \qquad r_x = |x| \cdot (\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j})$$

$$v_A + v_{AB} = v_{B4}\vec{i}$$

$$v_{O2} + v_{AO} + v_{AB} = v_{B4}\vec{i}$$

$$\omega_2 \wedge r_{O2A} + \omega_3 \wedge r_{AB} = v_{B4}\vec{i}$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \omega_2 \\ OA\cos\theta_2 & OA\sin\theta_2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \omega_3 \\ AB\cos\theta_3 & AB\sin\theta_3 & 0 \end{vmatrix} = v_{B4}\vec{i}$$

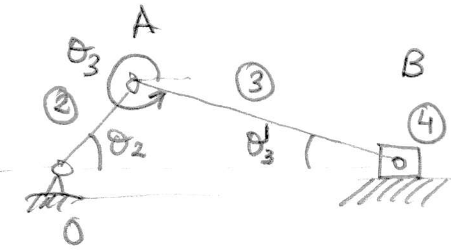
$$OA\cos\theta_2\omega_2\vec{j} - OA\sin\theta_2\omega_2\vec{i} + AB\cos\theta_3\omega_3\vec{j} - AB\sin\theta_3\omega_3\vec{i} = v_{B4}\vec{i}$$

$$\omega_2 OA[\cos\theta_2\vec{j} - \sin\theta_2\vec{i}] + \omega_3 AB[\cos\theta_3\vec{j} - \sin\theta_3\vec{i}] = v_{B4}\vec{i}$$ Aplicamos propiedades...

$$\omega_2 OA[\cos\theta_2\vec{j} - \sin\theta_2\vec{i}] + \omega_2 \cdot \frac{OA}{AB} \cdot \frac{\cos\theta_2}{\cos\left(\arcsin\left(\frac{OA\sin\theta_2}{AB}\right)\right)} \cdot AB\left[\cos\left(360^\circ - \arcsin\left(\frac{OA\sin\theta_2}{AB}\right)\right)\vec{j} - \sin\left(360^\circ - \arcsin\left(\frac{OA\sin\theta_2}{AB}\right)\right)\vec{i}\right] = \vec{v}_x$$

$$-OA\omega_2\sin\theta_2\vec{i} + \omega_2 \cdot \frac{OA}{AB} \cdot \frac{\cos\theta_2}{\cos\left(\arcsin\left(\frac{OA\sin\theta_2}{AB}\right)\right)} \cdot AB\sin\left(-\arcsin\left(\frac{OA\sin\theta_2}{AB}\right)\right)\vec{i} = v_x$$

$$\vec{v}_x = -\frac{OA^2\omega_2\sin\theta_2\cos\theta_2}{AB\sqrt{1 - \frac{OA^2\sin^2\theta_2}{AB^2}}} - OA\omega_2\sin\theta_2$$




$\vec{v}_x = -OA\,\text{sen}\,\theta_2\,\omega_2 - AB\,\text{sen}\,\theta_3'\,\omega_3 \quad \Big\| \quad \frac{dv_x}{dt} = a_x \quad \frac{d\theta_3}{dt} = \omega \quad \frac{d\omega}{dt} = \alpha$

$f(x) = u \cdot v \cdot w \rightarrow f(x) = u \cdot (v \cdot w) \rightarrow f(x) = u' \cdot (v \cdot w) + u \cdot (v \cdot w)'$ siendo $u \cdot (v \cdot w)' = v' \cdot w + v \cdot w'$

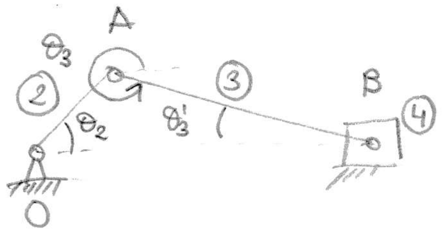
$f(x) = u' \cdot (v \cdot w) + u \cdot (v \cdot w)' = u'(v \cdot w) + u(v' \cdot w + v \cdot w') = u' \cdot (v \cdot w) + u \cdot (v' \cdot w) + u$

$f(x) = u' \cdot (v \cdot w) + u \cdot (v' \cdot w) + u \cdot (v \cdot w') \rightarrow f(x) = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'$

$a_x = \cancelto{0}{0 \cdot \text{sen}\,\theta_2\,\omega_2} - OA \cdot \cos \frac{d\theta_2}{dt} \cdot \omega_2 - OA \cdot \text{sen}\,\theta_2 \cdot \frac{d\omega_2}{dt} - \cancelto{0}{0 \cdot \text{sen}\,\theta_3'\,\omega_3} - AB \cdot \cos \frac{d\theta_3'}{dt} \cdot \omega_3 - AB \cdot \text{sen}\,\theta_3' \cdot$

$\frac{d\omega_3}{dt} \rightarrow a_x = -OA \cos\theta_2 \cdot \omega_2 \cdot \omega_2 - OA\,\text{sen}\,\theta_2 \cdot \alpha_2 - AB \cdot \cos\theta_3'\,\omega_3 \cdot \omega_3 - AB \cdot \text{sen}\,\theta_3' \cdot \alpha_3$

$a_x = -\omega_2^2\,OA \cos\theta_2 - \alpha_2\,OA\,\text{sen}\,\theta_2 - \omega_3^2\,AB \cos\theta_3' - \alpha_3\,AB \cdot \text{sen}\,\theta_3'$




Propiedades

$$\omega_3 = \omega_2 \cdot \frac{OA}{AB} \cdot \frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_3'}$$

$$\theta_3' = \operatorname{arcsen}\left(\frac{OA \operatorname{sen}\theta_2}{AB}\right)$$

$$\theta_3 = 360° - \theta_3'$$

$$a_{B_3} = a_{B_4}\vec{i}$$

$$a_{OA} + a_{AB} = a_{B4}\vec{i}$$

$$a_{O2} + a_{OA} + a_{AB} = a_{B4}\vec{i}$$

$$-\omega_2^2 \cdot r_{O_2A_2} + \alpha_2 \wedge r_{O_2A} - \omega_3^2 \cdot r_{AB} + \alpha_3 \wedge r_{AB} = a_{B4}\vec{i}$$

$$-\omega_2 \cdot OA(\cos\theta_2\vec{i} + \operatorname{sen}\theta_2\vec{j}) + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \alpha_2 \\ OA\cos\theta_2 & OA\operatorname{sen}\theta_2 & 0 \end{vmatrix} - \omega_3^2 \cdot AB(\cos\theta_2\vec{i} + \operatorname{sen}\theta_2\vec{j}) + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \alpha_3 \\ AB\cos\theta_3 & AB\operatorname{sen}\theta_3 & 0 \end{vmatrix} = a_{B4}\vec{i}$$

$$-\omega_2^2 OA\cos\theta_2\vec{i} - \omega_2^2 OA\operatorname{sen}\theta_2\vec{j} + \alpha_2 OA\cos\theta_2\vec{j} - \alpha_2 OA\operatorname{sen}\theta_2\vec{i} - \omega_3^2 AB\cos\theta_3\vec{i} - \omega_3^2 AB\operatorname{sen}\theta_3\vec{j} + \alpha_3 AB\cos\theta_3\vec{j} -$$

$$\alpha_3 AB\operatorname{sen}\theta_3\vec{i} = a_{B4}\vec{i}$$

$$-\omega_2^2[OA(\cos\theta_2\vec{i} + \operatorname{sen}\theta_2\vec{j})] + \alpha_2[OA(\cos\theta_2\vec{j} - \operatorname{sen}\theta_2\vec{i})] - \omega_3^2[AB(\cos\theta_3\vec{i} + \operatorname{sen}\theta_3\vec{j})] + \alpha_3[AB(\cos\theta_3\vec{j} - \operatorname{sen}\theta_3\vec{i})] = a_{B4}\vec{i}$$

$$-\omega_2^2[OA(\cos\theta_2\vec{i} + \operatorname{sen}\theta_2\vec{j})] + \alpha_2[OA(\cos\theta_2\vec{j} - \operatorname{sen}\theta_2\vec{i})] - \left(\omega_2 \cdot \frac{OA}{AB} \cdot \frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_3'}\right)^2 \cdot [AB(\cos(360° - \operatorname{arcsen}(\frac{OA\operatorname{sen}\theta_2}{AB}))\vec{i} +$$

$$\operatorname{sen}(360° - \operatorname{arcsen}(\frac{OA\operatorname{sen}\theta_2}{AB}))\vec{j}] + \alpha_3[AB[\cos(360° - \operatorname{arcsen}(\frac{OA\operatorname{sen}\theta_2}{AB}))\vec{j} - \operatorname{sen}(360° - \operatorname{arcsen}(\frac{OA\operatorname{sen}\theta_2}{AB}))\vec{i}] = a_{B4}\vec{i}$$

$$-\omega_2^2[OA[\cos\theta_2\vec{i} + \operatorname{sen}\theta_2\vec{j}]] + \alpha_2[OA[\cos\theta_2\vec{j} - \operatorname{sen}\theta_2\vec{i}]] - \left(\omega_2 \cdot \frac{OA}{AB} \cdot \frac{\cos\theta_2}{\cos(\operatorname{arcsen}(\frac{OA\operatorname{sen}\theta_2}{AB}))}\right)^2 \cdot [AB[\cos(360° - \operatorname{arcsen}($$

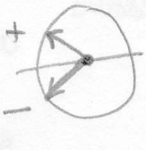
$$\frac{OA\operatorname{sen}\theta_2}{AB}))\vec{i} + \operatorname{sen}(360° - \operatorname{arcsen}(\frac{OA\operatorname{sen}\theta_2}{AB}))\vec{j}]] + \alpha_3[AB[\cos(360° - \operatorname{arcsen}(\frac{OA\operatorname{sen}\theta_2}{AB}))\vec{j} - \operatorname{sen}(360° - \operatorname{arcsen}($$

$$\frac{OA\operatorname{sen}\theta_2}{AB}))\vec{i}]] = \vec{a}_x$$ Simplificamos puesto que no hay términos en $\vec{j}$ al ser toda $(a\vec{i})$

$$-\omega_2^2 OA\cos\theta_2\vec{i} - \alpha_2 OA\operatorname{sen}\theta_2\vec{i} + \left(\omega_2 \cdot \frac{OA}{AB} \cdot \frac{\cos\theta_2}{\cos(\operatorname{arcsen}(\frac{OA\operatorname{sen}\theta_2}{AB}))}\right)^2 \cdot AB[\cos(360° - \operatorname{arcsen}(\frac{OA\operatorname{sen}\theta_2}{AB}))\vec{i} -$$

$$\alpha_3 AB\operatorname{sen}(360° - \operatorname{arcsen}(\frac{OA\operatorname{sen}\theta_2}{AB}))\vec{i}] = \vec{a}_x$$

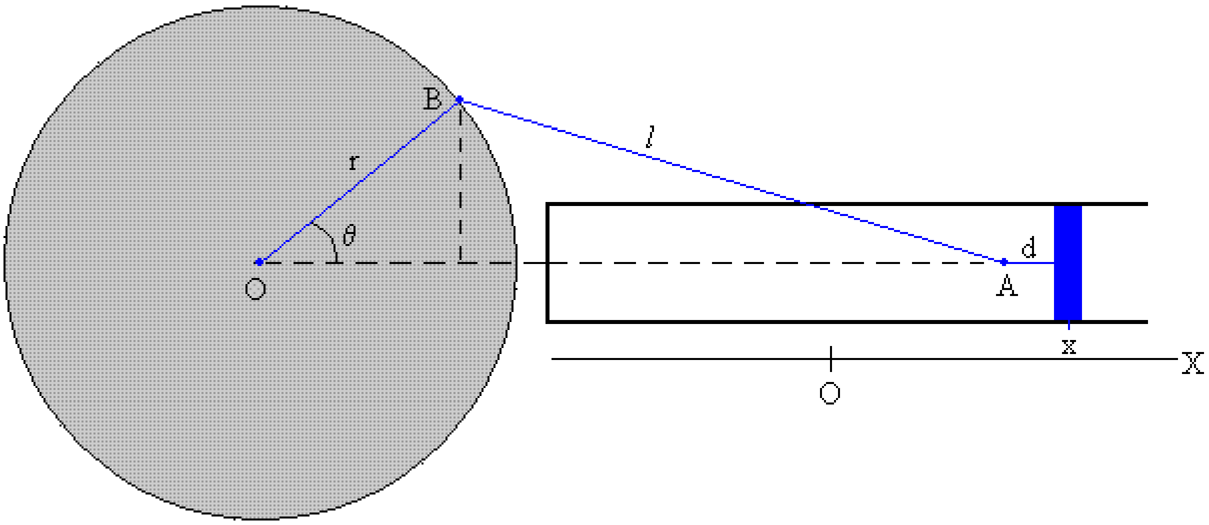
Cambiemos el signo a la función coseno y seno que tienen 360°




$$-\omega_2^2 OA\cos\theta_2\vec{i} - \alpha_2 OA\,\text{sen}\,\theta_2\vec{i} + \left[\omega_2\cdot\frac{OA}{AB}\cdot\frac{\cos\theta_2}{\cos\left(\text{arcsen}\left(\frac{OA\,\text{sen}\,\theta_2}{AB}\right)\right)}\right]^2\cdot AB\left[\cos\left(-\text{arcsen}\left(\frac{OA\,\text{sen}\,\theta_2}{AB}\right)\right)\vec{i} - \alpha_3 AB\cdot\right.$$

$$\left.\text{sen}\left(-\text{arcsen}\left(\frac{OA\,\text{sen}\,\theta_2}{AB}\right)\right)\vec{i}\right] = \vec{a}_x$$

Descripción del movimiento




Supongamos que la manivela tiene radio *r*, y la biela tiene una longitud *l* (*l*>2*r*). La manivela gira con velocidad angular constante *ω*, y el pistón oscila. La posición del pistón respecto del centro de la rueda es

$$x_e = r\cdot\cos\theta + \sqrt{l^2 - r^2\text{sen}^2\theta} + d$$

Si situamos el origen en la posición en la posición del pistón para *θ*=90º.

$$x_0 = \sqrt{l^2 - r^2} + d$$

## Posición del pistón

$$x = x_e - x_0 = r\cdot\cos\theta + \sqrt{l^2 - r^2\text{sen}^2\theta} - \sqrt{l^2 - r^2}$$

Si la manivela se mueve con velocidad angular *ω* constante, la posición del pistón en función del tiempo es

$$x = r\cdot\cos(\omega t) + \sqrt{l^2 - r^2\text{sen}^2(\omega t)} - \sqrt{l^2 - r^2}$$

- El valor máximo se obtiene para *ωt*=0, y vale

  $$x = r + l - \sqrt{l^2 - r^2}$$

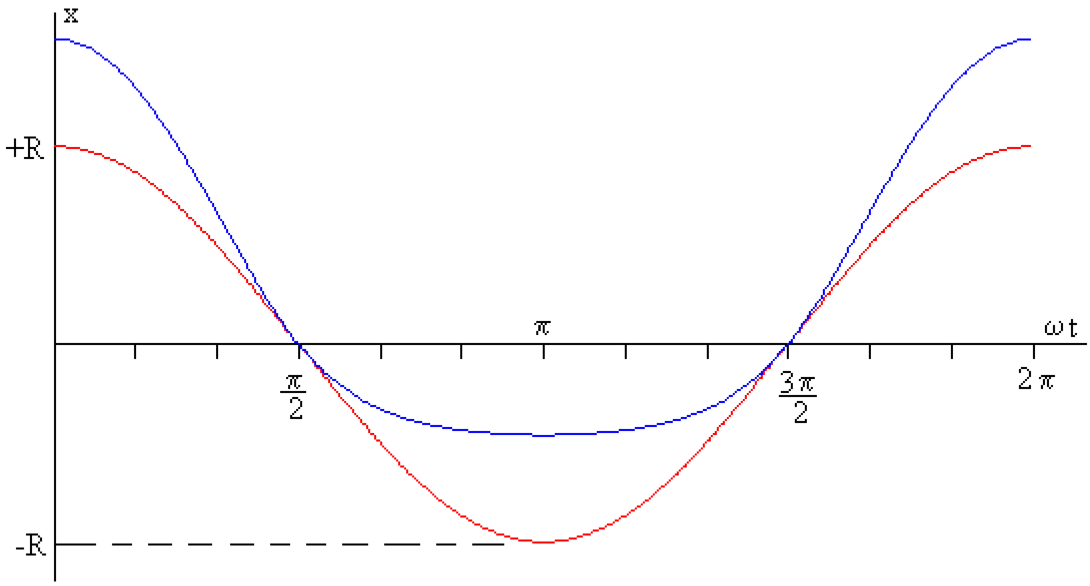
- El valor mínimo se obtiene para *ωt*=π,

  $$x = -r + l - \sqrt{l^2 - r^2}$$

En la figura, se representa la posición *x* del pistón en función del tiempo (color azul) y el MAS (color rojo)

$x=r\cdot\text{sen}(\omega\cdot t+\pi/2)=r\cdot\cos(\omega\cdot t)$

- El valor máximo se obtiene para *ωt*=0, y vale $x=+r$
- El valor mínimo se obtiene para *ωt*=π, y vale $x=-r$



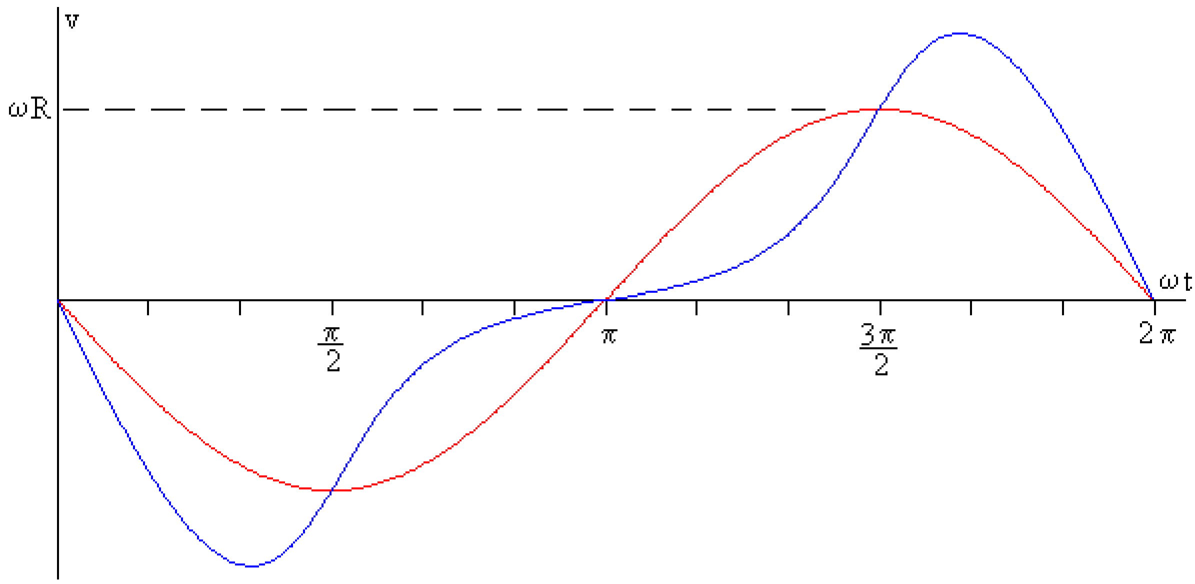

## Velocidad

Derivando la posición *x* con respecto al tiempo obtenemos la velocidad

$$v = \frac{dx}{dt} = -r\omega \operatorname{sen}(\omega t)\left(1 + \frac{r\cos(\omega t)}{\sqrt{l^2 - r^2 \operatorname{sen}^2(\omega t)}}\right)$$

En la figura, se representa la velocidad *v* del pistón en función del tiempo (color azul) y el MAS (color rojo)

$v=-r\cdot\omega\cdot\operatorname{sen}(\omega\cdot t)$




## Aceleración

Derivando la velocidad *v* con respecto al tiempo obtenemos la aceleración

$$a=\frac{dv}{dt}=-r\omega^2\cos(\omega t)\left(1+\frac{r\cos(\omega t)}{\sqrt{l^2-r^2\operatorname{sen}^2(\omega t)}}\right)-$$

$$r\omega\operatorname{sen}(\omega t)\left(\frac{-r\omega\operatorname{sen}(\omega t)\sqrt{l^2-r^2\operatorname{sen}^2(\omega t)}+r\cos(\omega t)\dfrac{r^2\omega\cos(\omega t)\operatorname{sen}(\omega t)}{\sqrt{l^2-r^2\operatorname{sen}^2(\omega t)}}}{l^2-r^2\operatorname{sen}^2(\omega t)}\right)=$$

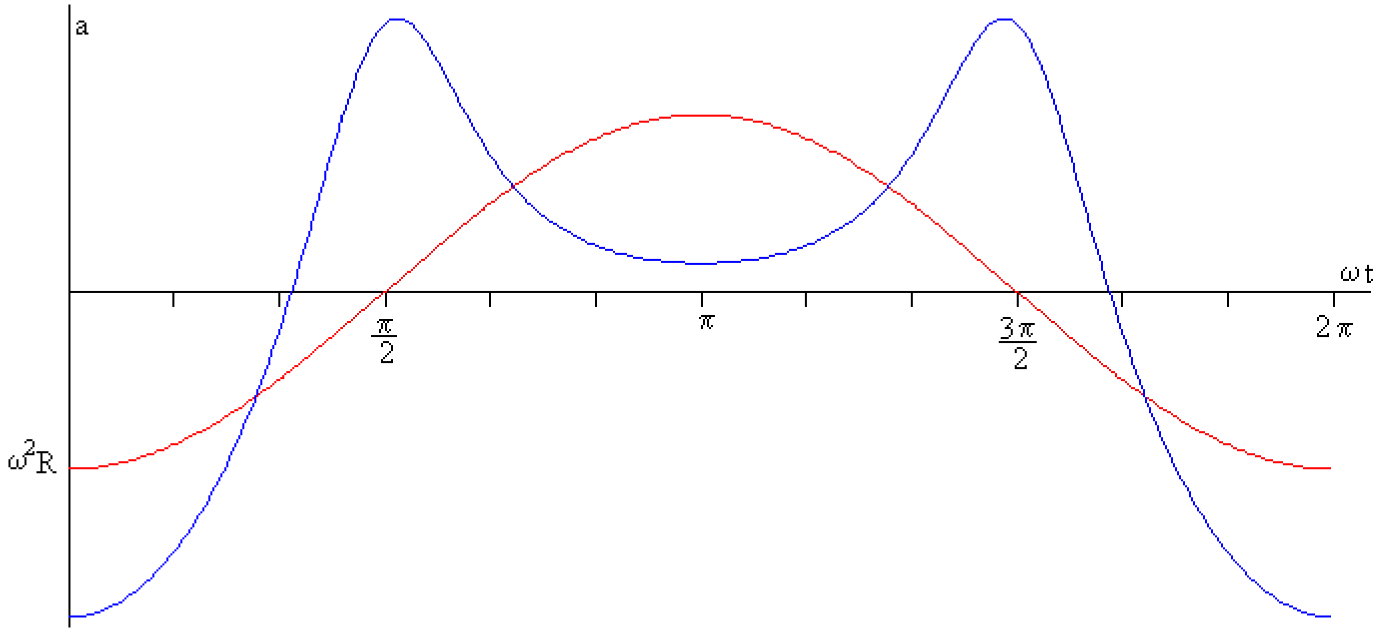
$$-r\omega^2\cos(\omega t)+$$
$$\frac{-r^2\omega^2\cos^2(\omega t)(l^2-r^2\operatorname{sen}^2(\omega t))+r^2\omega^2\operatorname{sen}^2(\omega t)(l^2-r^2\operatorname{sen}^2(\omega t))-r^4\omega^2\cos^2(\omega t)\operatorname{sen}^2(\omega t)}{(l^2-r^2\operatorname{sen}^2(\omega t))^{3/2}}$$

Simplificando se llega al resultado

$$a=\frac{dv}{dt}=-r\omega^2\left(\cos(\omega t)+\frac{r(l^2\cos(2\omega t)+r^2\operatorname{sen}^4(\omega t))}{(l^2-r^2\operatorname{sen}^2(\omega t))^{3/2}}\right)$$

En la figura, se representa la aceleración $a$ del pistón en función del tiempo (color azul) y el MAS (color rojo)

$a=-r\cdot\omega^2\cdot\cos(\omega\cdot t)$




## Aceleración nula, máxima velocidad

La velocidad es máxima cuando la aceleración es cero. Para calcular los ángulos $\omega\cdot t$ para los cuales la aceleración es cero, hay que resolver la ecuación

$$\cos(\omega t)(l^2-r^2\operatorname{sen}^2(\omega t))^{3/2}=-r(l^2\cos(2\omega t)+r^2\operatorname{sen}^4(\omega t))$$

Las operaciones que hay que realizar son las siguientes

Se sustituye $\operatorname{sen}^2(\omega t)=1-\cos^2(\omega t)$ y $\cos(2\omega t)=\cos^2(\omega t)-\operatorname{sen}^2(\omega t)=2\cos^2(\omega t)-1$

$$\cos(\omega t)(l^2-r^2+r^2\cos^2(\omega t))^{3/2}=-r\left(2(l^2-r^2)\cos^2(\omega t)-(l^2-r^2)+r^2\cos^4(\omega t)\right)$$

Se eleva al cuadrado ambos miembros

$$\cos^2(\omega t)(l^2-r^2+r^2\cos^2(\omega t))^3=r^2\left(2(l^2-r^2)\cos^2(\omega t)-(l^2-r^2)+r^2\cos^4(\omega t)\right)^2$$

y después de realizar algunas operaciones algebraicas se llega a la ecuación

$$r^4\cos^6(\omega t)+r^2(l^2-3r^2)\cos^4(\omega t)-(l^2-r^2)(l^2+3r^2)\cos^2(\omega t)+r^2(l^2-r^2)=0$$

Haciendo el cambio de variable $z=\cos^2(\omega t)$ se obtiene la ecuación cúbica

$$z^3+\frac{(l^2-3r^2)}{r^2}z^2-\frac{(l^2-r^2)(l^2+3r^2)}{r^4}z+\frac{(l^2-r^2)}{r^2}=0$$

Para calcular las raíces de la ecuación cúbica

$z^3+az^2+bz+c=0$

Calculamos los valores de $Q$ y $R$ dados por

$$Q=\frac{a^2-3b}{9}=\frac{4}{9}l^4$$

$$R=\frac{2a^3-9ab+27c}{54}=\frac{11l^6-27l^4r^2}{54r^6}$$

Si $R^2>Q^3$ tenemos una raíz real y dos complejas, en caso contrario, hay tres raíces reales. Supongamos que se cumple la primera condición. La condición $R^2>Q^3$ equivale a

$27r^4-33r^2l^2>5l^4$

Como $r>l$ esta condición no se cumple

Como $R^2<Q^3$ entonces la ecuación tiene tres raíces reales

$$\theta=\arccos\left(\frac{R}{\sqrt{Q^3}}\right)=\arccos\left(\frac{11l^2-27r^2}{16l^2}\right)$$

$$z_1=-2\sqrt{Q}\cos\left(\frac{\theta}{3}\right)-\frac{a}{3}=-\frac{4l^2}{3r^2}\cos\left(\frac{\theta}{3}\right)-\frac{l^2-3r^2}{3r^2}$$

$$z_2=-2\sqrt{Q}\cos\left(\frac{\theta+2\pi}{3}\right)-\frac{a}{3}=-\frac{4l^2}{3r^2}\cos\left(\frac{\theta+2\pi}{3}\right)-\frac{l^2-3r^2}{3r^2}$$

$$z_3=-2\sqrt{Q}\cos\left(\frac{\theta-2\pi}{3}\right)-\frac{a}{3}=-\frac{4l^2}{3r^2}\cos\left(\frac{\theta-2\pi}{3}\right)-\frac{l^2-3r^2}{3r^2}$$

Conocida las raíces de la ecuación cúbica $z$ se calcula el ángulo $\omega t$.

$$\omega t=\arccos\sqrt{z}$$

De las tres raíces, una es negativa (no se puede hallar la raíz cuadrada), otra es mayor que la unidad (la raíz es también mayor que la unidad y no se puede calcular en arco coseno) y la tercera, la única válida, está comprendida entre 0 y 1.

La aceleración es nula en dos instantes

$\omega t_1 = \arccos\sqrt{z_3}$

$\omega t_2 = 2\pi - \arccos\sqrt{z_3}$

**Ejemplo**:

- Sea $r$=1.0 y $l$=2.0

  $R$=5.037    $Q$=7.11

Comprobamos que $R^2<Q^3$ la ecuación cúbica tiene tres raíces reales

$z_1$=-5.172
$z_2$=4.028
$z_3$=0.1434

La velocidad es máxima (en módulo) o la aceleración es cero para

$\omega t_1 = \arccos\sqrt{0.1434} = 1.81\,\text{rad} = 67.7°$

$\omega t_2 = 2\pi - \arccos\sqrt{0.1434} = 5.10\,\text{rad} = 292.3°$